FUNCIÓN LINEAL: REVISIÓN

La función lineal, en símbolos, tiene esta estructura:

$$\boldsymbol{f(x) = y = ax + b}, \quad \text{donde } \boldsymbol{a} \in \Re - \{\boldsymbol{0}\} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{b} \in \Re$$

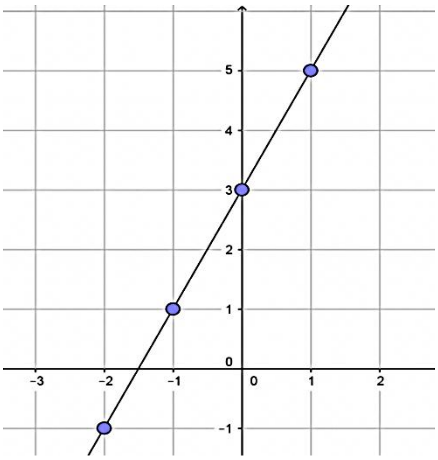
Ejemplo: La fórmula $f(x) = 2x + 3$, significa que la función asigna a cada valor de “x”, un valor de “y” que se obtiene multiplicando a la “x” por dos y sumándole tres.

Tabla de valores: se asigna cualquier valor a la variable independiente, se hacen los cálculos y se obtiene el valor de la variable dependiente correspondiente

x	$\boldsymbol{2x + 3 = y}$
0	$2.\mathbf{0} + 3 = 3$
1	$2.\mathbf{1} + 3 = 5$
2	$2.\mathbf{2} + 3 = 7$
-1	$2.(\mathbf{-1}) + 3 = 1$
-2	$2.(\mathbf{-2}) + 3 = -1$
-3	$2.(\mathbf{-3}) + 3 = -3$

$\longrightarrow$ $Par\ ordenado\ (0;3) \rightarrow f(0) = 3$

$\longrightarrow$ $Par\ ordenado\ (-3;-3) \rightarrow f(-3) = -3$



Representación gráfica de la función

Se llevaron al plano cartesiano algunos puntos de la tabla de valores y quedó representada la función con una recta, en este caso.

Cuando un punto pertenece a la función, quiere decir que se cumple la igualdad dada en la fórmula; por ejemplo:

El punto $(1;5) \in f(x) = 2x + 3$ porque cuando la x = 1 se obtiene y = 5; en cambio el punto $(-1;3) \notin f(x) = 2x + 3$ porque cuando la x = -1 se obtiene y = 1.

$$f(x) = y \begin{cases} f(0) = 3 \rightarrow 3\ es\ la\ \text{"}imagen\text{"}\ de\ 0 \quad y\ \ 0\ \ es\ la\ \text{"}preimagen\text{"}\ de\ 3 \\ f(1) = 5 \rightarrow 5\ es\ la\ \text{"}imagen\text{"}\ de\ 1 \quad y\ \ 1\ \ es\ la\ \text{"}preimagen\text{"}\ de\ 5 \\ f(-2) = -1 \rightarrow -1\ es\ la\ \text{imagen}de\ -2 \quad y\ -2\ \ es\ la\ \text{preimagen}\ de\ -1 \end{cases}$$

Parámetros de la recta: interpretación

$$\boldsymbol{Dada\ la\ \ f(x) = y = ax + b,} \begin{cases} \boldsymbol{a\ es\ la\ pendiente} \\ \boldsymbol{b\ es\ la\ ordenada\ al\ origen} \end{cases}$$

$Si\ \ \boldsymbol{a} > \mathbf{0} \Rightarrow la\ función\ es\ creciente$

$Si\ \ \boldsymbol{a} < \mathbf{0} \Rightarrow la\ función\ es\ decreciente$

$b = f(0)\ y\ \ \boldsymbol{b} \in \Re\ \ e\ \ indica\ el\ punto\ de\ intersección\ de\ la\ recta\ con\ el\ eje\ de\ ordenadas\ (y)$

Intersección de la recta con el eje de abscisas (x)

El punto donde la recta corta al eje x se denomina ***Raíz o Cero*** de la función. Se calcula resolviendo una ecuación, igualando la función a cero.

En nuestro ejemplo: $f(x) = 2x + 3 = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{2x = -3} \Rightarrow \mathbf{x} = -\frac{3}{2}$ puedes observar en el gráfico que la recta interseca en **x = -1,5**

Conociendo la ordenada al origen y la raíz, puede graficarse la recta y hacer el análisis completo.

Elementos de análisis en una función

- **Dominio**: El dominio de una función es el conjunto de todos los valores x que puede tomar la variable independiente. Se simboliza Dom f.

  En la función lineal siempre: $\mathrm{Dom}\, f = \Re$

- **Imagen**: es el conjunto de todos los valores que toma la variable y, obteniéndose al aplicar la función a los elementos del dominio. Se denota Im f

  En la función lineal siempre: $\mathrm{Im}\, f = \Re$

- Los **ceros o raíces** de una función son aquellos valores del dominio para los cuales la función se anula, es decir los x tales que f(x) = 0. Al conjunto de ceros se lo simboliza $\boldsymbol{C^0}$ y los valores se enumeran entre llaves. En el gráfico, son los puntos de intersección de la curva con el eje de abscisas.

  En nuestro ejemplo, $\boldsymbol{C^0} = \left\{-\frac{3}{2}\right\}$

- El **conjunto de positividad** de una función está integrado por los valores del dominio para los cuales la función es positiva, o sea "**y**" es positiva. En otras palabras $\mathbf{f(x) > 0}$. Se simboliza $\boldsymbol{C^+}$ y se indican con intervalos abiertos, o sea que se utilizan paréntesis. En el gráfico, este conjunto indica la región del eje x donde la curva está por encima del mismo.

  En nuestro ejemplo, $\boldsymbol{C^+} = (-\frac{3}{2}; \infty)$

- El **conjunto de negatividad** de una función está integrado por los valores del dominio para los cuales la función es negativa, o sea y es negativa. En otras palabras $\mathbf{f(x) < 0}$. Se simboliza $\boldsymbol{C^-}$ y se indican con intervalos abiertos, o sea con paréntesis. En el gráfico, este conjunto indica la región del eje x donde la curva está por debajo del mismo.

  En nuestro ejemplo, $\boldsymbol{C^-} = (-\infty; -\frac{3}{2})$

- El **Intervalo de crecimiento** de una función está integrado por los valores del dominio, para los cuales ambas variables crecen.

  En nuestro ejemplo, $\boldsymbol{I} \uparrow = \boldsymbol{\Re}$

- El **Intervalo de decrecimiento** de una función está integrado por los valores del dominio, para los cuales una variable decrece y la otra decrece.

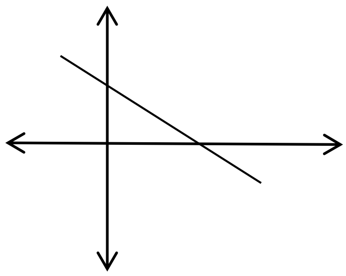
  En nuestro ejemplo, $\boldsymbol{I}\uparrow = \emptyset$

- La ordenada al origen: es el valor de la imagen que le corresponde a x = 0. Se simboliza $\mathbf{f(0) = y}$

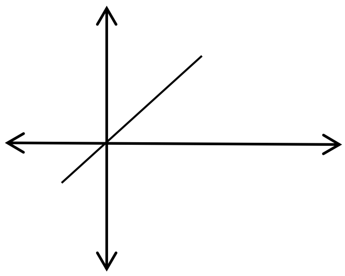
  En nuestro ejemplo, $f(0) = 3$

ACTIVIDADES

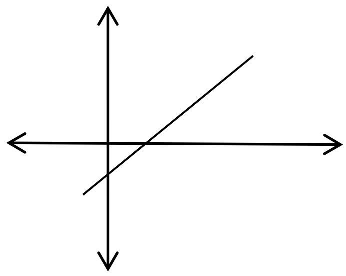
1) Indicar V (verdadero) o F (falso) y justificar la respuesta.
   a) El punto P=(-1; 2) pertenece a la función $y = \frac{x+5}{3}$
   b) $Q = (-2; -7) \notin f(x) = -2x - 11$
   c) M=(-4; 6) verifica la expresión $\frac{-3x}{2} = y$
   d) Si el punto $\left(\frac{3}{4}; -1\right)$ $pertenece\ a\ la\ función\ y = -4(-kx+1), entonces\ k = \frac{3}{5}$
2) Indicar si las afirmaciones son verdaderas o falsas y justificar.



$f(0) < 0$



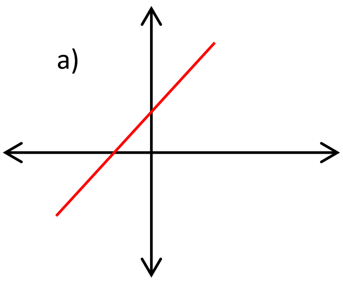
$C^0 > 0$



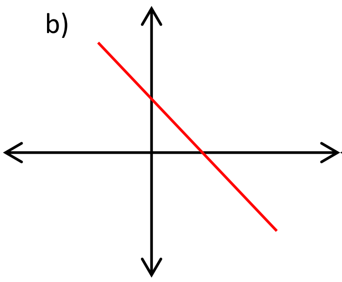
$x + y = -2$

3) Unir con flechas la fórmula que le corresponde a cada gráfico. Justificar.

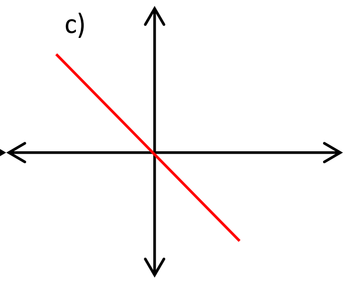
a)



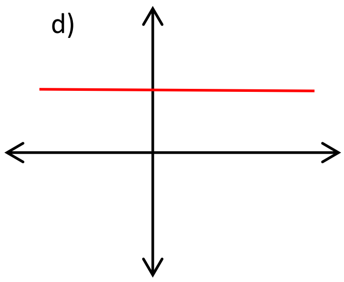
b)



c)



d)



I) $y = ax + b$ $\begin{cases} b > 0 \\ a < 0 \end{cases}$

II) $y = ax + b$ $\begin{cases} b = 0 \\ a < 0 \end{cases}$

III) $y = ax + b$ $\begin{cases} b > 0 \\ a = 0 \end{cases}$

IV) $y = ax + b$ $\begin{cases} b > 0 \\ a > 0 \end{cases}$

4) Calificar las siguientes proposiciones con V o F y justificar todas.
   a) $Si\ a > 0\ y\ \ \boldsymbol{C^0} = \left\{-\frac{1}{2}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{C^-} = \left(-\frac{1}{2}; \infty\right)$
   b) $Si\ a < 0\ \ y\ \ b < 0 \Rightarrow I\uparrow = \Re$
   c) $Si\ a > 0\ y\ \ b = 0 \Rightarrow P(0; 0) \in f(x)$
   d) $Si\ \boldsymbol{C^-} = \left(\frac{5}{2}; \infty\right) \Rightarrow a > 0$
   e) $Si\ a = 0\ \ y\ \ b < 0 \Rightarrow \boldsymbol{C^+} = \boldsymbol{\Re}$

FUNCIÓN CUADRÁTICA. PRIMERA PARTE

5) Llamamos función cuadrática a toda función de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ donde $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ **y** $\mathbf{c} \in \mathbb{R}$, **y** $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$. Esta expresión es la forma polinómica de la función cuadrática. La variable independiente debe estar elevada al cuadrado.

Los términos de esta expresión se denominan: $f(x) = \underline{ax^2} + \underline{bx} + \underline{c}$

Término Cuadrático — Término Lineal — Término Independiente

Coeficientes

- a → Coeficiente cuadrático
- b → Coeficiente lineal
- c → Coeficiente independiente

Nota: Diferenciar el término del coeficiente. El coeficiente es el número con su signo que multiplica a la variable.

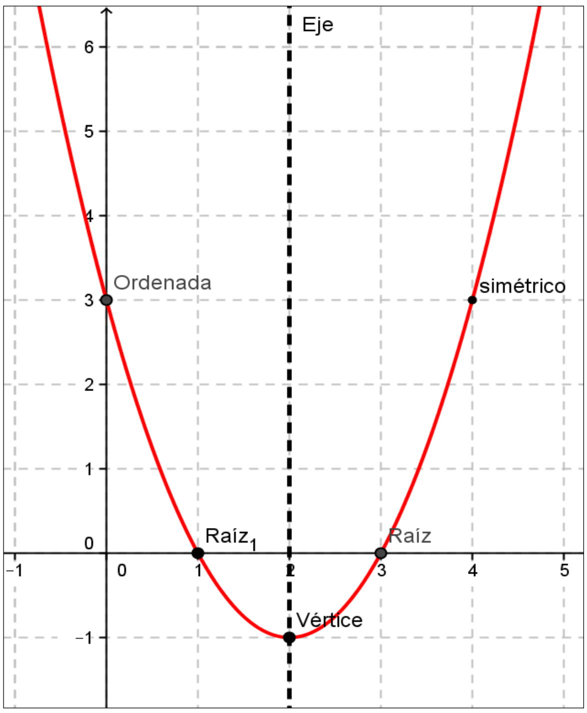
Una función cuadrática puede ser completa o incompleta.

En símbolos		Ejemplos
Completa: $f(x) = ax^2 + bx + c$		
Incompletas:		
$f(x) = ax^2$	$b = 0$ y $c = 0$	
$f(x) = ax^2 + bx$	$c = 0$	
$f(x) = ax^2 + c$	$b = 0$	

El término cuadrático no puede faltar.

La representación gráfica de una función de segundo grado es una curva simétrica, llamada ***PARÁBOLA.***

Elementos de la Parábola



Esta parábola representa a la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Las parábolas son curvas simétricas, respecto de una recta imaginaria perpendicular al eje x, llamada, ***Eje de simetría***, que pasa por la abscisa del vértice.

El ***vértice***, también es llamado extremo de la función. Si las ramas se orientan hacia arriba, el vértice es un **mínimo**; en cambio, si se orientan hacia abajo, se denomina **máximo** de la función.

La intersección de la curva con el eje de ordenadas (o sea el eje y) se denomina, **ordenada al origen** y siempre coincide con el coeficiente independiente, o sea, $f(0) = c$

La intersección de la curva con el eje de abscisas (eje x) se denomina **raíz**. Puede ocurrir que la parábola tenga una, dos, o ninguna raíz.

Todo punto de la curva, con excepción del vértice, tiene un punto simétrico. Es decir, los puntos simétricos entre sí, se encuentran a igual distancia del eje de simetría. En el gráfico, está indicado el punto simétrico de la ordenada al origen, pero también puede observarse que las raíces son simétricas también.

Las funciones cuadráticas presentan un tramo en el que son **crecientes** y otro en el que **decrecen**. El valor del dominio, donde se produce el cambio entre el crecimiento y decrecimiento, es la **abscisa del vértice**.

En cambio, **las raíces**, si existen, determinan el pasaje del conjunto de ***positividad*** al de ***negatividad*** o viceversa.

El coeficiente cuadrático determina la **concavidad** de la parábola. Es decir:

- Si **a > 0**, las ramas van hacia……………………, o sea, es cóncava positiva $(\cup +)$
- Si **a < 0**, las ramas van hacia……………………, o sea, es cóncava negativa$(\cap -)$

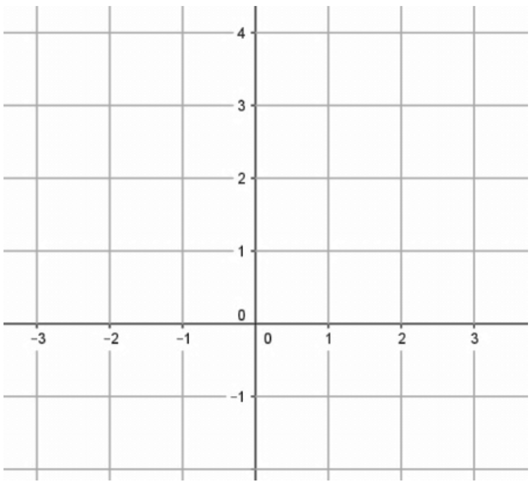
Además:

- Si **0 < a < 1** las ramas se "abren", es decir, tienden a acercarse al eje de abscisas.
- Si **a > 1** las ramas se "cierran", es decir, tienden a acercarse al eje de ordenadas.

DESPLAZAMIENTOS

Completar la tabla y graficar la función $f(x) = x^2$

x	$y = x^2$
0	
1	
2	
½	
-1	
-2	
-1/2	



Completar:

$Dom\ f(x) =$…………………………………………………… $Im\ f(x) =$……………………………………………………

$C^0 =$…………………………………………………… $C^+ =$……………………………………………………

$C^- =$…………………………………………………… $f(0) =$……………………………………………………

$I \uparrow=$…………………………………………………… $I \downarrow=$……………………………………………………

Esta función es la que llamamos parábola matriz; en ella $\mathbf{a = 1, b = 0\ y\ c = 0}$

1) Utilizando una aplicación o manualmente graficar las siguientes funciones.
a) Realizar el análisis completo.
b) Compararlas con la parábola matriz y extraer conclusiones.
c) Hallar la raíz y analizar completamente.

$$g_1(x) = x^2 - 3 \qquad g_2(x) = x^2 + 2 \qquad g_3(x) = -x^2 + 3 \qquad g_4(x) = -2x^2 \qquad g_5(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2$$

2) Utilizando una aplicación o manualmente graficar las siguientes funciones.
a) Realizar el análisis completo.

b) Compararlas con la parábola matriz y extraer conclusiones.
c) Hallar la raíz y analizar completamente.

$$h_1(x) = (x+2)^2 \qquad h_2(x) = (x-3)^2 \qquad h_3(x) = -(x-1)^2$$

$$h_4(x) = -(x+4)^2 + 2 \qquad h_5(x) = (x+2)^2 - 5$$

REGISTRAMOS LAS CONCLUSIONES

- En una función del tipo $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + c}$**,** podemos afirmar que el parámetro **c** indica el desplazamiento……………………………. Este desplazamiento modifica las coordenadas del…………………………, el valor de $\boldsymbol{f(0)}$**;** y la Imagen de la función.

  Si $a > 0 \;\; y \;\; c > 0$ la función no tiene raíces reales.

  Si $a > 0 \;\; y \;\; c < 0$ la función posee dos raíces reales opuestas.

  Si $a < 0 \;\; y \;\; c > 0$…………………………………………………………

  Si $a < 0 \;\; y \;\; c < 0$…………………………………………………………

- En una función del tipo $\boldsymbol{f(x) = (x - x_v)^2 + y_v}$**,** podemos afirmar que el parámetro $\boldsymbol{x_v}$ indica el desplazamiento……………………………. Este desplazamiento modifica las coordenadas del…………………………, el valor de $\boldsymbol{f(0) =}$**;** la……………… y el eje de simetría.

  ¿Qué ocurre con la imagen de la función?…………………………………………………………

Cuando $\boldsymbol{y_v = 0}$

Si $\boldsymbol{x_v > 0}$ la función se desplaza hacia…………………………sobre el eje de abscisas.

Si $\boldsymbol{x_v < 0}$ la función se desplaza hacia…………………………sobre el eje de abscisas.

¿Qué ocurre cuando $\boldsymbol{y_v \neq 0}$?

FUNCIONES DEL TIPO $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx} \quad \boldsymbol{; c = 0}$

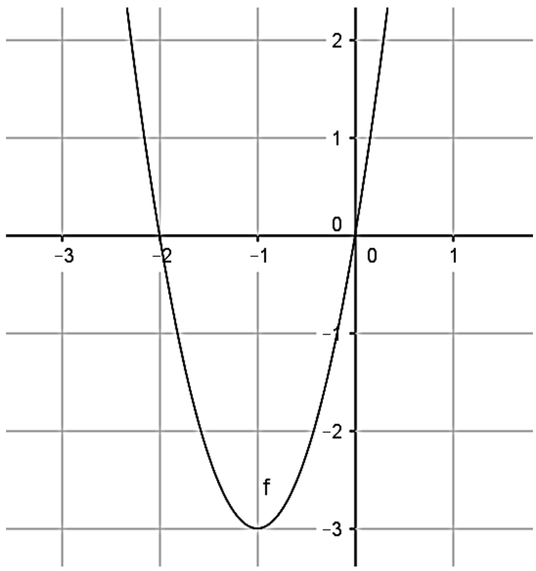
Ejemplo: $f(x) = 3x^2 + 6x$

Para calcular las raíces, no podemos hacer pasaje de términos. Entonces, utilizamos factor común.

$$3x^2 + 6x = 0$$

$x.(3x+6) = 0$ Si un producto es igual a cero, quiere decir que ambos factores pueden ser cero, entonces:

$$x_1 = 0 \quad \wedge \quad 3x + 6 = 0$$
$$x_2 = \frac{-6}{3} = -2$$



CONCLUSIÓN

- ✓ En las funciones cuadráticas de la forma $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx}$**,** **siempre** una raíz es igual a cero $\boldsymbol{x_1 = 0}$ y la otra es $\boldsymbol{x_2 = -\frac{b}{a}}$
- ✓ $f(0) = 0$ **siempre.**
- ✓ *La abscisa del vértice es* $\boldsymbol{x_v = -\frac{b}{2a} = \frac{-b}{2a}}$ **,** en el ejemplo $x_v = -1$
- ✓ *La ordenada del vértice* $\boldsymbol{y_v = f(x_v)}$ **,** en el ejemplo $f(-1) = 3(-1)^2 + 6(-1) = -3$

FUNCIONES DEL TIPO $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$

Construcción del gráfico de la función cuadrática completa. Para graficar una función aprovecharemos las características particulares de la parábola:

- **Vértice**: El vértice es un punto que pertenece a la parábola, como tal, posee dos coordenadas $(x_v; y_v)$, siendo x_v: la abscisa del vértice e y_v: la ordenada del vértice
  - Para hallar la abscisa del vértice, utilizamos la fórmula: $x_v = \frac{-b}{2a}$
  - Para hallar la ordenada del vértice, utilizamos la fórmula:

$$y_v = f(x_v)$$

- **Ecuación del eje de simetría**: El eje de simetría es una recta, por lo tanto se expresa a través de una ecuación, y como ya se dijo, atraviesa la parábola por la abscisa del vértice, en consecuencia, la ecuación del eje de simetría coincide con esta abscisa.

$$x = x_v$$

- **Ordenada al origen**: siempre es el punto $(0; c)$. En el caso que se trate de una fórmula incompleta, c = 0
- **Raíces o Ceros**: Las raíces de una función se obtienen igualando a cero la función, de esta manera se transforma en una ecuación, pero, como no puede aplicarse el pasaje de términos, es necesario aplicar una fórmula que se llama **resolvente** y en ella intervienen únicamente los coeficientes **a, b y c**

$$\boldsymbol{x_{1;2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Ejemplo:

$f(x) = -2x^2 + 5x - 2$ $\qquad a = -2 \quad b = 5 \quad c = -2$

$$-2x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$x_{1;2} = \frac{-\ 5 \pm \sqrt{5^2 - 4.(-2).(-2)}}{2.(-2)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 16}}{-4} = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{-4} = \frac{-5 \pm 3}{-4}$$

$$x_1 = \frac{-5 + 3}{-4} \quad y \quad x_2 = \frac{-5 - 3}{-4}$$

$$x_1 = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} \quad y \quad x_2 = \frac{-8}{-4} = 2$$

Dos raíces reales distintas

TRABAJO PRÁCTICO Nº 1: FUNCIÓN CUADRÁTICA

1) Hallar la fórmula de la función cuyo gráfico es como el de $f(x) = x^2$, pero:

- **a)** Trasladado 3 unidades hacia la izquierda y 2 unidades hacia arriba.
- **b)** Trasladado 3 unidades hacia abajo.
- **c)** Trasladado 2 unidades hacia la derecha y 4 unidades hacia abajo.
- **d)** Invertido y desplazado 1 unidad hacia la izquierda.
- **e)** Invertido y desplazado 3 unidades hacia abajo y 5 a la derecha.

2) Determinar una función cuadrática para cada ítem, teniendo en cuenta las siguientes características:

- **a)** El vértice sea un máximo, el eje de simetría sea x = 0 y la ordenada al origen es y = 5
- **b)** El vértice sea un mínimo y el eje de simetría sea x = 2

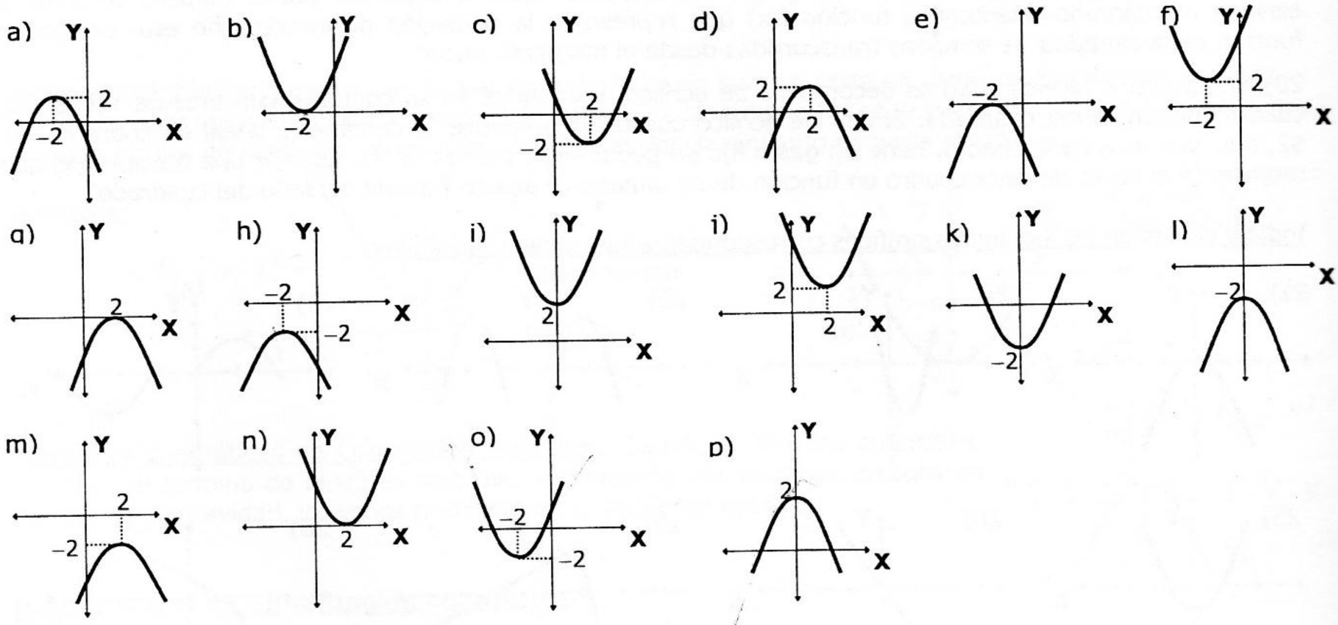
3) **Identificar cada una de las siguientes funciones cuadráticas con el gráfico que le corresponde:**

47) $f_{(x)} = x^2+2$ 51) $f_{(x)} = (x+2)^2+2$ 55) $f_{(x)} = -x^2+2$ 59) $f_{(x)} = -(x+2)^2+2$

48) $f_{(x)} = x^2-2$ 52) $f_{(x)} = (x+2)^2-2$ 56) $f_{(x)} = -x^2-2$ 60) $f_{(x)} = -(x+2)^2-2$

49) $f_{(x)} = (x+2)^2$ 53) $f_{(x)} = (x-2)^2+2$ 57) $f_{(x)} = -(x+2)^2$ 61) $f_{(x)} = -(x-2)^2+2$

50) $f_{(x)} = (x-2)^2$ 54) $f_{(x)} = (x-2)^2-2$ 58) $f_{(x)} = -(x-2)^2$ 62) $f_{(x)} = -(x-2)^2-2$



4) Completar el cuadro

Función	*Coordenadas del vértice (Máx. o Mín.)*	*Ecuación del eje de simetría*	$f(0) =$	*Imagen f*	*Conjunto de ceros*
$y = 2x^2$					
$y = -3x^2$					
$y = x^2 - 1$					
$y = -2x^2 + 3$					
$y = (x-2)^2 + 4$					
$y = (x+3)^2 + 2$					
$y = -(x-1)^2 - 4$					
$y = -2(x+1)^2 - 3$					

5) Completar las siguientes proposiciones respecto de la gráfica de f(x) =ax^2+bx+c; escribiendo las condiciones sobre los coeficientes a, b y c.

a) El vértice es un mínimo, entonces……………………………………………………………
b) El eje de simetría es x = 0; luego………………………………………………………………
c) Interseca al eje “y” en 3, luego…………………………………………………………………
d) El vértice es el punto (0,0); luego………………………………………………………………
e) Corta al eje “x” en dos puntos, luego…………………………………………………………..
f) No tiene su vértice sobre el eje “y”; luego……………………………………………………..

6) Graficar y analizar completamente las siguientes funciones:

$a)\ f(x) = -x^2 + 12x - 36$ $\quad d)\ f(x) = -x^2 + 3x$ $\quad g)\ f(x) = 2x^2 + 4x - \dfrac{5}{2}$ $\quad j)\ f(x) = -\dfrac{1}{4}x^2$

$b)\ f(x) = 5x^2 - 10x + 1$ $\quad e)\ f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{2}$ $\quad h)\ f(x) = x^2 - 4x + 4$ $\quad k)\ f(x) = x^2 - 5x + 8$

$c)\ f(x) = 4x^2 - 1$ $\quad f)\ f(x) = x^2 + x + 1$ $\quad i)\ f(x) = -x^2 + 4x$ $\quad l)\ f(x) = -x^2 + 2x + 3$

7) Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = 3x^2 + 1$

a) Calcular $f(-3),\ f(\sqrt{6})\ y\ f(4^{-1})$
b) Indicar, de ser posible, los valores de x para los cuales se verifique: $f(x) = 0,\ \ f(x) = 48,$
$$f(x) = -2 \quad y \quad f(x) = f(2)$$

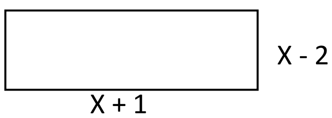
8) Encuentra analíticamente:

a) El valor de ***b*** para que la función $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + bx - 4$ pase por el punto $Q = (3; 5)$
b) Los valores de ***b*** y ***c*** para los cuales los puntos (1; 0) y (-1; 6) pertenezcan a la gráfica de $f(x) = x^2 - bx + c$
c) El valor de ***b*** para que la parábola $y = x^2 + bx + 3$ tenga el vértice en el punto (2; -1)
d) Determinar el valor de ***a*** para que la función $y = ax^2 + 2x - 3$ tenga la abscisa del vértice igual a 2.

9) Un grupo de biólogos estudia las características de un lago artificial en el cual introdujeron un conjunto de peces para analizar su evolución. En un principio, la colonia crece reproduciéndose normalmente, pero al cabo de unos meses algunos peces mueren, a causa del hacinamiento. Los registros indican que el conjunto de peces evoluciona según la ley $n(x) = 240 + 10x - 0{,}1x^2$, donde ***x*** representa los días que han transcurrido y ***n*** la cantidad de peces. Con esta proyección pronto se extinguirán.
Sobre la base de la función dada por ese científico, responder:

a) ¿Cuántos peces introdujeron en el lago?
b) ¿Durante cuánto tiempo la cantidad de peces fue aumentando?
c) ¿Cuál fue la cantidad máxima de peces que hubo en el lago? ¿En qué momento se produjo tal situación?
d) ¿Luego de cuánto tiempo se extinguiría la población?

10) El cuadrado de un número entero es igual al siguiente multiplicado por -4. ¿Cuál es el número?
11) La suma de los cuadrados de tres números enteros consecutivos es 50. ¿Cuáles son dichos números?
12) El quíntuplo de un número es igual a la mitad de su cuadrado, aumentado en 12 unidades. ¿Cuáles son los números que cumplen esa condición?
13) ¿Por qué número natural hay que dividir al número 156 para que el cociente, el resto y el divisor coincidan?
14) El área del rectángulo de la figura es 18 cm. Calcula su perímetro

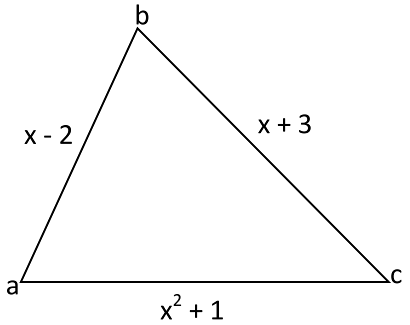


15) Hallar la base y la altura de un rectángulo sabiendo que su diagonal es de 50 cm y que la base es 10 cm más larga que la altura.

16) Calcular el lado de un rombo, si su superficie es de 96 cm^2 y que la razón entre sus diagonales es ¾.

17) Por ahora yo tengo el doble de tu edad. Pero cuanto tú tengas mi edad, la suma de los cuadrados de nuestras edades será 26 veces la suma de las mismas. ¿Cuál es la edad de cada uno?

18) El perímetro del triángulo de la figura es 50 cm. Calcular la longitud de cada lado.



19) Se lanza un proyectil que describe una trayectoria parabólica de ecuación $y = x - \frac{x^2}{400}$

a) ¿A qué distancia del punto de salida impacta el proyectil?

b) Determinar las coordenadas de la máxima altura alcanzada por él.

20) En una isla se introducen una determinada cantidad de abejas el 01/03. La siguiente función permite calcular la cantidad de abejas a medida que transcurren los días, luego de esa fecha.

$$C_{(x)} = -5(x+20)(x-80)$$

a) ¿qué día la población de abejas es mayor?

b) ¿cuál es la mayor cantidad de abejas que llega a habitar la isla?

c) ¿cuántas abejas habrá en la isla el 5 de abril?

d) ¿cuándo se extinguen las abejas?

e) ¿cuántas abejas se introdujeron el 01/03?

21) La velocidad (V) de un misil (medida en metros por segundo) en función del tiempo (t), está dada por la función $V(t) = 54t - 2t^2 + 10$

a) ¿cuál es la velocidad máxima que alcanza el misil?

b) ¿en qué momento alcanza dicha velocidad?

c) ¿luego de cuánto tiempo se detiene el misil?

d) ¿En qué momento la velocidad será de 350 m/s? ¿y de 400 m/s?

22) ECUACIONES CUADRÁTICAS

Las ecuaciones, se trabajan algebraicamente (distributivas, cuadrado de binomio, pasajes de términos) hasta que se llega a la expresión más reducida e igualada a cero. Luego se resuelven de la misma manera que se calculan los ceros en la función; según sean completas o incompletas.

$a)\ \frac{x+3}{3} = \frac{4}{4-x}$ $\quad b)\ (x+6)(x-6) = 133$ $\quad c)\ 3(x^2-1) - 2(x^2+2) = 18$

$d)\ \frac{10x^2-2x}{3x+1} = 3x - 1$ $\quad e)\ 2x^2 + 2 = 0$ $\quad f)\ 2x^2 = 12x$

$g)\ 18x(0{,}25x-5)=0$ $\quad h)\ 5(1-x)^2=-10(x+1)$ $\quad i)\ (x-2)^2+(x-3)^2=181$

$j)\ \dfrac{2(x^2-3)}{4}-\dfrac{x^2+3}{2}=x+\dfrac{x^2}{2}$ $\quad k)\ \sqrt{16x-\dfrac{2}{x}}=2$ $\quad l)\ (x-1)^2+(x-2)^2+12x-3x^2=-11$

$m)\ (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\sqrt{12}$ $\quad n)\ \dfrac{5x+1}{3x+2}=\dfrac{7}{x+4}$ $\quad o)(4x+2)(x+1)=(2x+3)x+2(x+1)$

$q)\ \dfrac{2(x-3)}{x}=\dfrac{5x-2}{x+2}$ $\quad r)\ \dfrac{3x^2}{2}-\dfrac{2x}{3}=\dfrac{x}{6}+\dfrac{5}{4}x^2$ $\quad s)\ \dfrac{(x+1)(3x+4)-2x^2}{4x}=-\dfrac{4}{3}$

Función Cuadrática (II)

Distintas fórmulas para la función cuadrática.

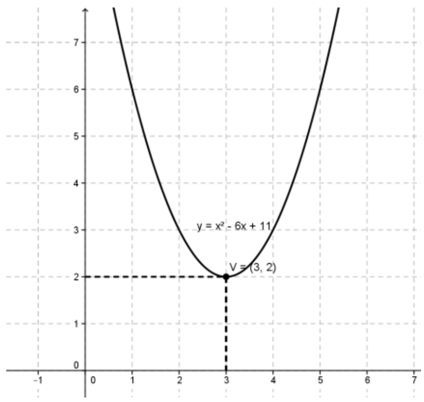
Forma Canónica

Una función cuadrática puede escribirse en forma canónica; en dicha expresión intervienen el coeficiente cuadrático y las coordenadas del vértice.

$$f(x)=a(x-x_v)^2+y_v$$

Por ejemplo: $f(x)=(x-3)^2+2$

$x_v \qquad y_v$



Si observas el gráfico de la función, notarás que la abscisa del vértice es positiva, en cambio en la fórmula aparece negativa, eso ocurre como consecuencia del signo negativo de la fórmula. Esto sucede SIEMPRE con la abscisa, en cambio la ordenada del vértice mantiene su signo.

En el ejemplo, el coeficiente cuadrático es +1.

Si se quiere obtener las raíces de la función, sólo debemos igualar a cero la misma y convertirla en una ecuación. $(x-3)^2+2=0$

$$(x-3)^2=-2$$
$$|x-3|=\sqrt{-2}$$
$$x\notin\mathbb{R}$$

Como se ve en la representación gráfica, la función no posee raíces reales (no corta al eje de abscisas).

Pasaje de forma canónica a forma polinómica

Para pasar de una forma a la otra, solamente debemos operar algebraicamente la expresión, es decir, separar en términos, desarrollar el cuadrado de binomio y reducir al mínimo la expresión.

$f(x)=(x-3)^2+2$

$\quad=x^2+2.x.(-3)+3^2+2$

$\quad=x^2-6x+9+2$

$f(x)=x^2-6x+11$ Forma polinómica

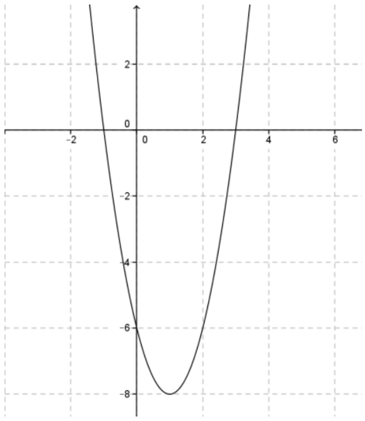
Forma Factorizada

Una función cuadrática puede escribirse en forma factorizada, si posee raíces; en dicha expresión también interviene el coeficiente cuadrático. Esta es la fórmula:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Ejemplo:

$$f(x) = 2(x + 1)(x - 3)$$



Observa que las raíces de la función son $x_1 = -1$ y $x_2 = 3$, pero en la expresión factorizada aparecen con el signo contrario, esto sucede por efecto del signo negativo de la fórmula.

Pasaje de forma factorizada a forma polinómica

Para realizar el pasaje debe aplicarse la propiedad distributiva de la multiplicación.

$$f(x) = 2(x + 1)(x - 3)$$
$$f(x) = (2x + 2)(x - 3)$$
$$f(x) = 2x^2 - 6x + 2x - 6$$

$f(x) = 2x^2 - 4x - 6$ Forma polinómica

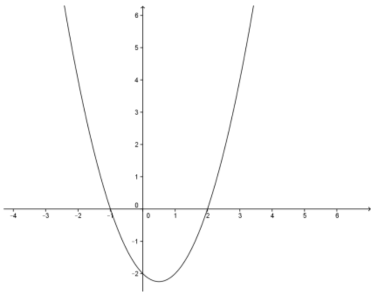
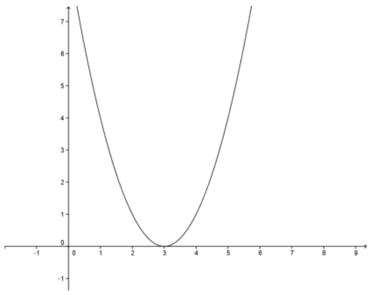
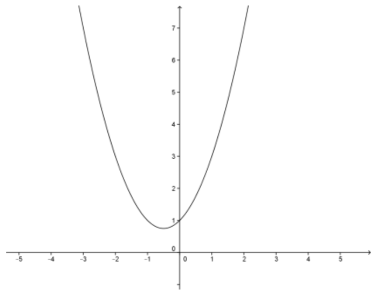
DISCRIMINANTE

Ya hemos visto, al calcular las raíces de una función, que pueden suceder tres casos: que la parábola corte al eje de abscisas en dos puntos, en un punto o en ningún punto. El discriminante es la expresión algebraica que permite discriminar (diferenciar, distinguir) el tipo de raíces que tiene la función cuadrática, o el tipo de soluciones que posee una ecuación de segundo grado; sin necesidad de conocer el valor de las mismas. Se simboliza con la letra griega delta mayúscula.

$$\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac}$$

Observar que se trata de la expresión que se encuentra dentro de la raíz cuadrada, en la fórmula resolvente, en la que intervienen los tres parámetros de la forma polinómica de la función.

El resultado del discriminante es un número real, entonces, vamos a establecer las tres situaciones que pueden presentarse, según el signo de dicho número.

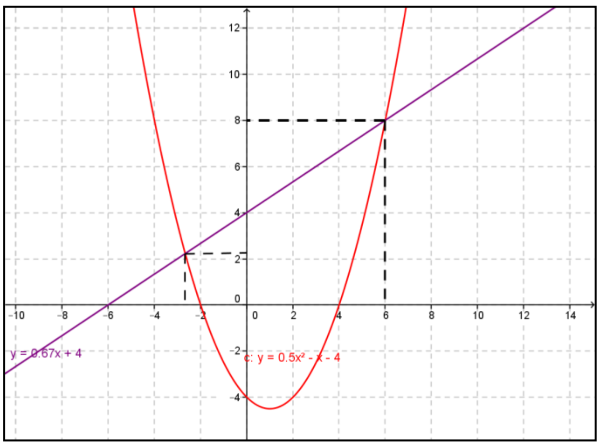
$\Delta > 0$	$\boldsymbol{\Delta = 0}$	$\Delta < 0$
		
La ecuación tiene dos raíces reales distintas.	***La ecuación tiene una raíz real, llamada raíz doble.***	***La ecuación no tiene raíces reales.***
La función atraviesa en dos puntos el eje de abscisas.	***La función toca en un solo punto el eje de abscisas.***	***La función no toca el eje de abscisas.***

SISTEMAS DE ECUACIONES MIXTOS

En el gráfico de la derecha se han representado las siguientes funciones:

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - x - 4 \\ g(x) = \dfrac{2}{3}x + 4 \end{cases}$$

Estas dos funciones forman un sistema de ecuaciones con dos incógnitas mixto. Resolver el sistema, es encontrar los valores de x e



y que satisfagan las ecuaciones, y en el gráfico representan los puntos de intersección de ambas funciones, si existen.

Observando la gráfica podemos estimar los puntos de intersección; pero para obtener los valores exactos debe recurrirse a un procedimiento analítico. Utilizamos el método de igualación.

$$\frac{1}{2}x^2 - x - 4 = \frac{2}{3}x + 4$$

$$\frac{1}{2}x^2 - x - 4 - \frac{2}{3}x - 4 = 0$$

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x - 8 = 0 \quad \textit{resolvemos la ecuación aplicando fórmula resolvente.}$$

$$x = \frac{\frac{5}{3} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 - 4.\frac{1}{2}.(-8)}}{2.\frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{3} \pm \frac{13}{3}}{1} = \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -\dfrac{8}{3} \end{cases}$$

Estos son los valores de las abscisas de los ersección, debemos hallar el valor de las ordenadas. Para ello se sustituyen los valores de x en cualquiera de las ecuaciones originales, conviene tomar la más sencilla, o sea la lineal.

$$y = \frac{2}{3}x + 4 \qquad\qquad y = \frac{2}{3}x + 4$$

$$y = \frac{2}{3}.6 + 4 \qquad\qquad y = \frac{2}{3}.\left(-\frac{8}{3}\right) + 4$$

$$y = 8 \qquad\qquad y = \frac{20}{9}$$

Entonces los puntos de intersección son: $P_1 = (6; 8)$ y $P_2 = (-\frac{8}{3}; \frac{20}{9})$ y son la solución del sistema.

<u>Trabajo Práctico N° 4: Función Cuadrática(II)</u>

1) Hallar las coordenadas del vértice de las siguientes funciones cuadráticas y escribe luego su forma canónica.

$a)\ f(x) = -2x^2 + 4x - 6 \qquad b)\ f(x) = -x^2 + 5x \qquad c)\ f(x) = 4x^2 - 9$

$d)\ f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + 2 \qquad e)\ f(x) = -2(x+1)(x-3) \qquad f)\ f(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2 - 3$

2) Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando en cada caso.
   a) El punto $P = (-1; 1)$ pertenece a la gráfica de la función $f(x) = -x^2$
   b) El vértice de la función cuadrática $f(x) = \frac{2}{5}(x-3)^2 - 2$ es el punto $(3;\ -2)$
   c) La forma factorizada de la función cuadrática $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ está dada por $f(x) = (x-1)(x-\frac{1}{3})$

3) De las siguientes funciones expresadas en forma factorizada:
   a) Indicar las raíces
   b) Obtener su forma polinómica.

$f_1(x) = (x-2)(x+4) \qquad f_2(x) = 2(x-1)(x-3) \qquad f_3(x) = (x+5)^2 \qquad f_4(x) = x(x-3)$

4) De las siguientes funciones expresadas en forma canónica:
   a) Indicar el vértice de cada función

b) Hacer el pasaje a forma polinómica.

$$f_1(x) = (x+2)^2 - 16 \qquad f_2(x) = 2(x-3)^2 - 2 \qquad f_3(x) = 4\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$$

5) Completar la tabla.

Forma polinómica	***Forma factorizada***	***Forma canónica***
$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 12$		
	$g(x) = 3(x-2)(x-1)$	
		$h(x) = 3(x+2)^2 - 3$
		$k(x) = (x+1)^2$

6) a) Escribir la forma factorizada de la función $y = 2(x-1)^2 - 8$ sin hallar previamente la forma polinómica.
b) Escribir la forma polinómica de la función hallada en el inciso anterior.

7) Hallar la forma canónica de la función cuyas raíces son: x_1 = -4 y x_2 = 0, cuya gráfica pasa por el punto (2; -6).

8) Determinar la ecuación de la función cuadrática empleando la forma más conveniente, en cada caso.
a) El coeficiente cuadrático es -2 y el vértice es (-3; 4)
b) El coeficiente cuadrático es 2, corta al eje de ordenadas en 9 y pasa por el punto (-1; 3)
c) El vértice es $V = (2; 3)$ y pasa por el punto (4; -7)
d) El coeficiente cuadrático es -1, el eje de simetría es x = 2 y la ordenada al origen es 5.
e) Las raíces son -4 y 6; y a = -1/3.
f) Tiene por vértice de su parábola asociada $V = (-1; 5)$ y una de sus raíces es x = 4
g) $|a| = 3,\ C^- = (-\infty; -4) \cup (1; \infty)\ y\ C^+ = (-4; 1)$

9) Indicar el tipo de raíces de las funciones, utilizando el discriminante.

$$a)\ y = x^2 + 13x + 12 \qquad b)\ y = x(x+2) - 5 \qquad c)\ f(x) = (2x-3)^2$$

10) Hallar, si existe, $k \in \mathbb{R}$ para que se cumpla la condición solicitada en cada caso:
a) La función $f(x) = -x^2 + x - k$ tiene una raíz doble.
b) La ecuación $3x^2 + k = 0$ no tiene solución en $\mathbb{R}$.
c) El gráfico de la función $g(x) = -kx^2 + 1$ interseca al eje de las abscisas en dos puntos.
d) El gráfico de las funciones de la forma $f(x) = -x^2 - kx - 5$ tiene contacto con el eje x, pero no lo atraviesa.

11) Los registros de temperatura tomados entre las 0 hs y las 24 hs en una zona rural se ajustan a la función: $T(x) = -\frac{1}{10}(x-12)^2 + 10$ (Donde T = temperatura en °C y x = hora del día). Responder:
a) ¿Cuál fue la máxima temperatura?
b) ¿A qué hora se registró?
c) ¿Cuándo la temperatura fue de 0°C?
d) ¿Qué temperatura había a las tres de la tarde?

12) Al poner a prueba un nuevo automóvil se comprobó que para velocidades mayores que 10 km/h y menores que 150 km/h, el rendimiento de combustible ***r*** (en km/litro) está relacionado con la velocidad ***v*** (en km/h) mediante la función $r(v) = 0{,}002v.(180 - v)$.
Determinar a qué velocidad el rendimiento es máximo y calcular dicho rendimiento.

13) Determinar analítica y gráficamente la solución de los sistemas cuadráticos mixtos:

$$a)\begin{cases} y = x^2 \\ y = x + 2 \end{cases} \quad b)\begin{cases} y = x^2 + 4 \\ y = -5x + 4 \end{cases} \quad c)\begin{cases} y = x^2 - 2x + 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \quad d)\begin{cases} y + 4x^2 = 1 \\ y = \frac{1}{4}x^2 + 1 \end{cases} \quad e)\begin{cases} y = 2x^2 + 4x - 6 \\ 2y = 4x^2 - 16x + 16 \end{cases}$$

Clave de respuestas

Ejercicio 1)	***Ejercicio 2)***	***Ejercicio 3)***	***Ejercicio 4)***	***Ejercicio 5)***
a) V (1; -4)	a) F	$f_1(x) = x^2 + 2x - 8$	$f_1(x) = x^2 + 4x - 12$	$f(x) = \frac{1}{2}(x-4)(x+6)$ $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 - \frac{25}{2}$
b) V (5/2; 25/4)	b) V	$f_2(x) = 2x^2 - 8x + 6$	$f_2(x) = 2x^2 - 12x + 16$	$g(x) = 3x^2 - 9x + 6$ $g(x) = 3(x - \frac{3}{2})^2 - \frac{3}{4}$
c) V (0;-9)	c)F	$f_3(x) = x^2 - 3x$	$f_3(x) = 4x^2 + 4x + 1$	$h(x) = 3x^2 + 12x + 9$ $h(x) = 3(x+1)(x+3)$
d) V (-1; 9/4)				$k(x) = x^2 + 2x + 1$ $k(x) = (x+1)^2$
e) V (1; 8)				
f) V (-1; -3)				
Ejercicio 6)		***Ejercicio 7)***	***Ejercicio 8)***	***Ejercicio 9)***
$y = 2(x-3)(x+1)$		$y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 2$	$a)\ y = -2(x+3)^2 + 4$	*a) Dos raíces* $\mathbb{R}$
$y = 2x^2 - 4x - 6$			$b)\ y = 2x^2 + 8x + 9$	*b) Dos raíces* $\mathbb{R}$
Ejercicio 10)		***Ejercicio 11)***	$c)\ y = -\frac{5}{2}(x-2)^2 + 3$	*c) Una raíz doble*
$a)\ k = \frac{1}{4}$		$a)\ 10°C$	$d)\ y = -x^2 + 4x + 5$	
$b)\ k \in (0; \infty)$		$b)\ 12\ hs.$	$e)\ y = -\frac{1}{3}(x+4)(x-6)$	***Ejercicio 12)***
$c)\ k \in (0; \infty)$		$c)\ 2\ hs.\ y\ 22\ hs$	$f)\ y = -\frac{1}{5}(x+1)^2 + 5$	$90\ {}^{km}/_{h}\ \ y\ \ 16{,}2\ {}^{km}/_{l}$
$d)\ k_1 = 2\sqrt{5}$ ∨ $k_2 = -2\sqrt{5}$		$d)\ 9{,}1°C$	$g)\ y = -3(x+4)(x-1)$	
Ejercicio 13)				
$a)\ S = \{(2;4); (-1;1)\}$		$b)\ S = \{(0;4); (-5;29)\}$	$c)\ S = \{(-1;4); (1;0)\}$	$d)\ S = \{(0;1)\}$ | $e)\ S = \left\{\left(\frac{7}{6}; \frac{25}{18}\right)\right\}$